UNIVERSITA' COMMERCIALE
LUIGI BOCCONI

MASTER IN ECONOMIA
DEL TURISMO

RETI COMPLESSE

Rodolfo Baggio
rodolfo.baggio@uni-bocconi.it

Gennaio 2004

SOMMARIO

1. INTRODUZIONE

I dizionari definiscono una rete come (Dizionario Italiano Devoto Oli):

> Intreccio di linee, reali o ideali, che s'incrociano, cui ci si riferisce per indicare un sistema di collegamenti o di comunicazioni oppure una struttura complessa articolata in più punti.

Ma negli ultimi decenni il termine ha assunto significati e importanza ben più vasti della semplicistica definizione dei dizionari.

Forse i concetti di rete e quelli strettamente collegati di sistema e di complessità sono i più fecondi fra quelli su cui si è indagato nella seconda metà del secolo scorso.

Negli ultimi due-tre anni, poi, una serie impressionante di ricerche sulle strutture topologiche delle reti complesse e sulle dinamiche della loro evoluzione hanno fornito nuovi spunti di riflessione e nuovi strumenti per la comprensione dei fenomeni collegati (Albert & Barabási, 2002; Dorogovtsev & Mendes 2002; Newman, 2003).

Reti sociali, reti fra aziende, reti telematiche, reti biologiche, reti di trasporto, reti neurali sembrano, in molti casi, avere in comune caratteristiche peculiari. E queste caratteristiche permettono la comprensione, l'analisi e la previsione di comportamenti di questi sistemi in un modo che fino a ora era parso sfuggire ai tentativi di molti studiosi.

Il concetto di rete come principio organizzativo dominante per spiegare come funziona realmente il mondo attrae un numero sempre crescente di sforzi multidisciplinari. Fisici, matematici, sociologi, economisti sono al lavoro per affinare i risultati di tali ricerche e per trarne indicazioni pratiche nei rispettivi campi di indagine. In un mondo che diventa sempre più "connesso" è importante capire i meccanismi e le leggi generali che permettono una trasmissione efficiente delle informazioni, dell'energia o altro, ma è altrettanto importante capire che cosa può rendere tremendamente vulnerabile una tale rete.

In questi ultimi anni lo studio delle reti complesse ha conosciuto uno sviluppo tumultuoso. Gli esempi più frequentemente studiati sono rappresentati dalle reti di computer connessi fra loro da linee telefoniche, dalle reti metaboliche all'interno di una cellula (o di un organismo biologico più complesso) in cui i diversi elementi sono collegati fra loro da reazioni chimiche, dalle diverse relazioni esistenti fra le persone appartenenti ad una certa comunità, dalla rete di neuroni all'interno del cervello.

Per riassumere:

- esiste un preciso trend verso il networking, e l'evidenza empirica dimostra la crescente importanza delle attività di relazione;
- diversi fattori spingono verso la formazione di reti: il mercato, la globalizzazione, lo sviluppo delle tecnologie informatiche e delle telecomunicazioni, l'evoluzione delle caratteristiche della domanda e il trend verso un'economia basata sull'informazione e la conoscenza;
- il networking sembra una reazione promettente, con probabili vantaggi economici per le aziende che sfidano i driver del mercato. Si "fa rete" per ampliare gli obiettivi di business, entrare in nuovi mercati, accedere efficacemente a risorse distribuite, condividere del

rischio, gestire l'innovazione, specializzare e distribuire il lavoro, coordinare e aumentare l'efficienza nelle catene di fornitura ecc.;

- il networking è rischioso: le reti sono complesse, precarie e vulnerabili con notevoli rischi di fallimento;
- è necessario uno sforzo apposito per la gestione delle reti, il semplice coordinamento non è sufficiente per i rischi e i costi implicati, e uno sforzo per la gestione deve passare necessariamente per uno studio analitico delle reti e della loro evoluzione.

La varietà, la complessità e l'eterogeneità delle reti è grande. Una breve consultazione della letteratura mostra decine di nomi diversi e di forme diverse.

Le connessioni fra le azioni di diversi individui e le caratteristiche globali che si osservano di un sistema non sono sempre ovvie. Il comportamento globale non può essere derivato semplicemente sommando i comportamenti e le intenzioni dei singoli elementi del sistema, non foss'altro che per le dimensioni che spesso questi sistemi hanno.

Prendiamo come esempio uno stormo di uccelli. Lo vediamo volteggiare in cielo, dirigersi verso una certa direzione, cambiare rotta, reagire alle condizioni atmosferiche ecc. Gli ornitologi hanno scoperto che non esiste un leader del gruppo, che nessuno dei singoli uccelli ha il senso globale delle caratteristiche del gruppo che sono principalmente dovute all'interazione locale fra componenti decentralizzate (Reynolds, 1987). E' un ottimo esempio di sistema in cui il comportamento collettivo complesso è dovuto all'interazione dei singoli individui.

I sistemi il cui comportamento non può essere spiegato solo sommando le azioni parziali delle loro componenti sono noti come sistemi non lineari ed esibiscono una dinamica estremamente complessa. Oltre alla semplice situazione di equilibrio nella quale il sistema non cambia nel tempo o alle situazioni descritte sui libri di testo nelle quali un pattern si ripete regolarmente a intervalli di tempo fissati (comportamento ciclico), un sistema non lineare mostra comportamenti erratici anche quando la sua descrizione matematica è completamente deterministica. In queste condizioni, se si facesse partire l'evoluzione di un sistema e la si seguisse nel tempo fino a un certo istante, il risultato finale sarebbe molto diverso da quello che si otterrebbe compiendo un altro ciclo partendo dalle stesse condizioni iniziali. Quindi anche il comportamento di un sistema che dipendesse fortemente dalle condizioni iniziali è completamente erratico e le uniche previsioni che si possono fare sono di natura probabilistica (Bar-Yam, 1997).

E anche quando si trovano delle risposte, le implicazioni possono essere sbalorditive perché spesso implicano una sconnessione fra il comportamento ben definito di un componente e quello globale del sistema.

Per esempio, in un sistema economico, se si potesse avere la precisa conoscenza dei piani e delle strategie e perfino delle intenzioni di un individuo in un mercato, questo non sarebbe sufficiente a comprendere il funzionamento del mercato.

Supponiamo di seguire un investitore sul mercato azionario in tutte le sue transazioni e nei messaggi che egli scambia con gli altri e supponiamo di essere perfino in grado di predire con certezza le sue azioni in ogni possibile scenario. Anche se si potesse fare ciò per un periodo di tempo sufficiente, non saremmo comunque in grado di prevedere esattamente il prezzo di un'azione. Questo, infatti, dipenderà dal comportamento di centinaia di altri investitori e dalle loro decisioni collettive, decisioni che interagiscono in modo così complesso da rendere praticamente vano ogni sforzo di costruzione di un modello deterministico.

Lo studio dei sistemi complessi è considerato da molti una nuova disciplina scientifica, con applicazioni in numerosi campi diversi: reti neurali, modelli di traffico, intelligenza artificiale, sistemi sociali, organismi biologici ecc.

L'avvento di tecnologie informatiche più potenti ha permesso di effettuare con maggiore facilità simulazioni più complete e raffinate e la comprensione di questi modelli ha consentito studi molto più approfonditi.

Un modo efficiente per studiare un sistema complesso è quello di scomporlo in parti più semplici, comprenderne il funzionamento e poi cercare di ricomporre il sistema originale.

Lo studi delle reti è un approccio possibile (Bornholdt & Schuster, 2002). Molti sistemi complessi possono essere rappresentati in termini di reti di elementi che interagiscono. Esistono moltissime tipologie di reti, ma essenzialmente sono tutte caratterizzate dalle seguenti componenti: un insieme di nodi e un insieme di connessioni fra i nodi. Un nodo può essere visto come un'entità computazionale: riceve un input e lo elabora per fornire un output. Il processo può essere estremamente semplice (anche nullo) o molto complesso. Le connessioni determinano il flusso delle informazioni fra i nodi che può essere unidirezionale o bidirezionale. Le interazioni fra i nodi attraverso le connessioni portano al comportamento globale del sistema, comportamento che non può essere osservato nelle singole componenti. Le capacità della rete sorpassano quelle dei singoli e, molto spesso, anche quelle della semplice somma dei singoli comportamenti, facendone un agglomerato estremamente potente.

Sicuramente il tipo e il numero dei "nodi" di una rete condizionano molto il comportamento finale del sistema, ma, recentemente, lo studio della topologia, della forma della rete, ha assunto grande importanza.

Per esempio, forse proprio la struttura della sua rete di parentele di conoscenze consentì a Cosimo il Vecchio di prendere il potere a Firenze alla metà del XV secolo e di fondare quella dinastia dei Medici che tanta importanza ha avuto nei successivi tre secoli di storia italiana (Padgett & Ansell, 1993).

E verso la fine del XII secolo gli inquisitori cattolici cominciarono a capire che i loro fallimenti nell'arginare la diffusione delle eresie erano dovuti a una cattiva comprensione del fenomeno (Ormerod & Roach, 2003). Non aveva molto senso, come scriveva il famoso domenicano Bernardo Gui (1323), colpire a caso singoli individui; bisognava, invece, cercare di dirigere i propri sforzi nell'identificare gli eretici che avevano visitato un sospetto, le guide che lo avevano portato fin lì e scortato via, insomma, cosa importante era la rete dei collegamenti, non i singoli nodi. E con queste idee di "immunizzazione selettiva" la Chiesa riuscì ad arginare il fenomeno fino alla Riforma.

Un altro esempio tratto dalla genetica può chiarire meglio il concetto.

Come è ben noto, in una cellula, costituente elementare di ogni organismo vivente, il nucleo contiene un certo numero di cromosomi formati da filamenti di DNA. Ogni cellula contiene, nel suo DNA, l'intero patrimonio genetico, il genoma, dell'organismo del quale fa parte e che ne determina le caratteristiche. La maggior parte di questo patrimonio è, naturalmente, comune agli altri individui della stessa specie: ma per una piccola percentuale è unico e distintivo.

L'unità funzionale del genoma è il gene: attraverso reazioni chimiche ben precise esso codifica le informazioni per la produzione delle proteine, necessarie per il funzionamento dell'organismo. Le proteine sono responsabili di qualsiasi reazione chimica essenziale per la vita, per la costruzione di componenti di un organismo o per la regolazione delle sue funzioni.. Gli ormoni, gli enzimi e i neurotrasmettitori sono tutti proteine.

Ora, l' *Escherichia coli*, batterio presente nell'intestino umano, ha un solo cromosoma e 4 500 geni, il *Saccharomyces cerevisiae*, il lievito che fa gonfiare il pane o fermentare il vino e la birra ha 16 cromosomi e circa 6 000 geni, la *Drosophila melanogaster*, il noto moscerino della frutta ha 8 cromosomi e 13 000 geni, il *Caenorhabditis elegans*, un verme nematode di circa un millimetro di lunghezza ha 12 cromosomi e 19 000 geni, l'*Arabidopsis thaliana*, una pianta infestante della famiglia della senape ha 5 cromosomi e 25 000 geni, l'*Homo sapiens* ha 26 cromosomi e qualcosa fra 30 000 e 40 000 geni.

E' chiaro che la differenza fra le specie di questi organismi non può essere dovuta solo al numero delle componenti dei rispettivi patrimoni genetici. La forma e il tipo delle connessioni delle reti responsabili della sintesi proteica deve avere un'importanza molto maggiore di quanto finora è stato ipotizzato.

Le reti del mondo reale non hanno un'architettura disegnata da qualche entità esterna, ma sono autoorganizzate dalle azioni di un gran numero di individui. Da queste interazioni locali possono emergere comportamenti globali non triviali che influenzano il comportamento, la resistenza della rete ad attacchi esterni, la sua permeabilità alla diffusione di informazioni, idee, malattie o la sua ottimizzazione rispetto a parametri di costo, velocità, tempo.

Lo studio delle proprietà topologiche e la costruzione di modelli previsionali è quindi di fondamentale importanza per la comprensione di sistemi complessi in molti campi. Una serie di esempi di reti e delle possibili applicazioni del loro studio è elencata in Tabella 1.1 (rielaborata da Hackathorn, 2003).

Nello studio delle reti, almeno nella formulazione che questo sta avendo con le ultime ricerche, si fa ampio uso di "tecniche di analogia". Situazioni, fenomeni, o anche solo espressioni matematiche di certe relazioni vengono spesso a somigliare a quelle analoghe di altre discipline. I risultati ottenuti in queste possono essere allora trasferiti alle reti complesse e generare nuove teorie, idee o spiegazioni di comportamenti. E' questo il caso di settori come la teoria della percolazione, o la meccanica statistica, classica o quantistica, la teoria dei grafi, i modelli di diffusione, e così via.

Tabella 1.1 Reti del mondo reale e applicazioni

Dominio	Nodi	Connessioni	Applicazioni
Interazioni metaboliche cellulari	Proteine	Scambio di enzimi	Ottimizzazione, studio del funzionamento
Interconnesioni neurali nel cervello	Cellule nervose	Sinapsi	Diagnosi e cura delle malattie neurologiche
Farmacologia	Elementi chimici	Reazioni chimiche	Efficacia delle medicine, determinazione del dosaggio
Diffusione di malattie (HIV, SARS…)	Individui (ammalati, portatori sani…)	Meccanismi di infezione	Controllo delle epidemie
Catene alimentari, ecosistemi	Animali, piante…	Consumo di preda da parte del predatore	Salvaguardia dell’ambiente, regolamentazione di caccia, pesca, …
Oscillatori biologici (lucciole, grilli, uccelli)	Eventi (luce, canto coordinato)	Fasatura fra gli eventi	Dinamiche di gruppo
Relazioni sessuali	Individui	Contatti sessuali	Controllo delle malattie sessuali
Reti sociali e di amicizia	Individui	Conoscenza	Efficacia del gruppo, collaborazione
Direzioni aziendali	Membri del consiglio di amministrazione	Partecipazione comune	Trend dell’industria
Citazioni incrociate nella letteratura scientifica	Articoli	Citazioni e riferimenti	Linee di ricerca, collaborazioni, schemi di finanziamento
Attori cinematografici	Attori	Partecipazione allo stesso film	Evoluzione dell’industria e del mercato del cinema
Struttura della lingua	Parole	Occorrenza di una parola vicino a un’altra	Evoluzione del linguaggio
Mercato azionario	Offerta di azioni	Fluttuazioni accoppiate	Regolamentazione
Chiamate telefoniche	Individui o località	Chiamate telefoniche	Bilanciamento del carico, ottimizzazione delle linee, scoperta di frodi
WWW	Pagine web	Collegamento ipertestuale fra pagine	Algoritmi di ricerca, strategie di promozione
Software	Moduli	Dipendenza da chiamate	Affidabilità del software
Rete di distribuzione elettrica	Generatori, stazioni, sottostazioni	Linee ad alta tensione, trasformatori	Stabilità nella fornitura, previsione della domanda
Internet: connessioni fisiche	Router	Linee di comunicazione	Resilienza a guasti accidentali, protezione da attacchi mirati

2. RETI E GRAFI

La rappresentazione più nota di una rete è quella che viene fatta disegnando dei punti (i nodi) e delle linee che li collegano (archi). Questa è anche la forma di una famiglia di oggetti noti in matematica come grafi.

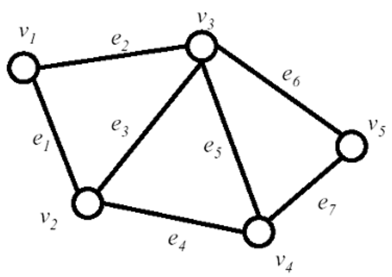
Formalmente un grafo è definito come una coppia di insiemi: l'insieme *V* dei nodi (o vertici, attori) e l'insieme *E* delle connessioni fra di essi (detti anche archi, legami, link); ogni arco viene disegnato come linea che congiunge due nodi.

La teoria dei grafi nasce ufficialmente alla fine del XVIII secolo con la soluzione del famoso problema dei ponti di Königsberg da parte del matematico svizzero Leonhard Euler (1736).

La tecnica da lui usata si dimostrò di utilità molto maggiore che non la semplice soluzione di puzzle. Il fisico tedesco Gustav Kirchoff analizzò i circuiti elettrici in termini di grafi e i chimici trovarono una naturale corrispondenza fra grafi e strutture di atomi e molecole. Un grafo descrive anche una rete di trasporti, una rete neurale del cervello di un essere vivente o un'economia nella quale le aziende sono i nodi e le transazioni fra di esse sono gli archi.

Nel XX secolo la teoria ha assunto un carattere prevalentemente statistico e algoritmico (König, 1936; Bollobás, 1985). Vista la rappresentazione di rete come grafo, tutte le deduzioni, le misure e gli indicatori della teoria possono essere applicati a questo caso. I termini grafo e rete sono sinonimi a tutti gli effetti.

$$\text{rete / grafo } G(V, E): \begin{cases} \text{vertici: } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}; \\ \text{archi: } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \end{cases}$$



$$A_G = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Figura 2.1 Rete/grafo e sua matrice di adiacenza

Dal punto di vista matematico un grafo *G(V,E)* può essere rappresentato da una matrice (detta matrice di adiacenza A_G) che abbia i nodi come elementi di riga o di colonna e contenga un valore diverso da zero (se diverso da *1* rappresenta un "peso" del collegamento: costo, velocità, energia ecc.) all'incrocio se i due nodi sono connessi. Di conseguenza l'apparato matematico dell'algebra lineare è quello che naturalmente viene utilizzato per gli aspetti formali dello studio delle reti complesse.

3. PROPRIETÀ DELLE RETI

Le reti complesse che si trovano in natura condividono spesso caratteristiche statistiche globali che includono "distanze" brevi fra due nodi qualunque e connessioni altamente raggruppate.

In molte di esse pochi elementi hanno molte più connessioni della media; la frazione di nodi che ha k collegamenti, $p(k)$, ha un andamento (decrescente) che dipende da una legge di potenza: $p(k) \sim k^{-y}$ (con y che varia fra *2* e *3*).

La comprensione degli elementi e delle relazioni di ogni classe di reti è necessaria per una corretta definizione e descrizione e per poter cercare di scoprire i principi di costruzione strutturale e per tentare di prevederne il comportamento nel tempo (evoluzione).

A parte i reticoli regolari e ordinati tipici, per esempio, delle strutture cristalline, gli altri tipi di rete sono stati studiati per molti anni sulla base di modelli statistici di tipo aleatorio.

La teoria classica delle reti, nata dagli studi di Eulero (1736), fu definita dai matematici ungheresi P. Erdős e A. Rényi (1959).

L'assunzione base è che ogni coppia di nodi della rete sia connessa casualmente con una probabilità p. Ciò porta a una rete statisticamente omogenea nella quale, nonostante una fondamentale casualità, la maggioranza dei nodi ha lo stesso numero di connessioni $\bar{k}$.

In particolare, la connettività segue una distribuzione di Poisson con un picco al valore $\bar{k}$, quindi la probabilità di trovare un nodo fortemente connesso decade esponenzialmente ($P(k) \approx e^{-k}$ per $k >> \bar{k}$), il cammino medio fra due nodi (il numero di connessioni in sequenza che permettono di raggiungere un nodo qualunque a partire da un altro) è relativamente piccolo e la densità di raggruppamento locale (*clustering*) di sottoreti è decisamente bassa.

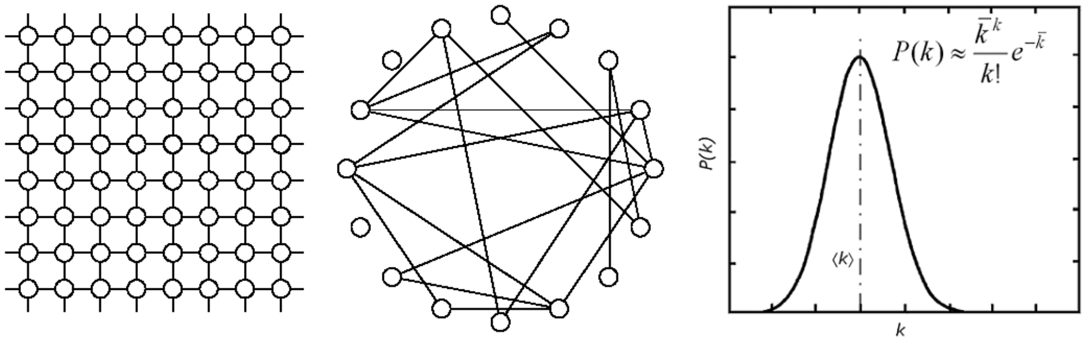


Figura 3.1 Reticolo regolare, rete casuale e distribuzione delle connessioni in una rete casuale

D'altra parte, studi empirici effettuati su reti biologiche, sociali o tecnologiche hanno mostrato che esistono decise deviazioni da questa struttura casuale (Newman, 2003).

Fra le tante reti esistenti in natura una delle prime che vengono in mente è la rete sociale dei rapporti fra persone. In questa i nodi sono gli individui ed esiste un collegamento fra due di essi se si conoscono o sono parenti. Una rete del genere ben difficilmente è raffigurabile con un reticolo regolare, e, a differenza di una rete totalmente casuale, essa è disomogenea. Esistono diversi raggruppamento, cioè esiste una alta probabilità che due nodi collegati a un altro siano collegati fra di loro; gli amici dei miei amici sono amici (con buona probabilità).

L'effetto di "piccolo mondo" è abbastanza noto: due persone si incontrano e scoprono di avere conoscenti comuni. L'idea che la catena di conoscenti fra due persone qualunque al mondo fosse limitata (sei per la precisione) era stata formulata dal romanziere ungherese Frigyes Karinthy nel 1929 ed enunciata scientificamente dal sociologo Stanley Milgram nel 1967.

L'esperimento di Milgram consisteva nello studio dell'itinerario seguito da lettere spedite dal Nebraska a diretti conoscenti con destinazione finale un indirizzo di Pittsburgh.

Il numero medio di passaggi risultò essere di cinque con sei persone coinvolte. L'esperimento era lungi dall'essere perfettamente rigoroso, ma da allora il termine "sei gradi di separazione" è passato a identificare il fenomeno.

Studiando reti come quelle delle compartecipazioni di attori in film o la rete di distribuzione elettrica o quella delle connessioni neurali del piccolo verme *C. elegans*, S. Strogatz e D. Watts (1998) scoprirono un interessante fenomeno.

Quasi a metà strada fra un reticolo regolare e una rete totalmente casuale, queste reti reali sono caratterizzate da piccola distanza media L fra i nodi (detta distanza caratteristica) e alto coefficiente di clustering C (misura la densità locale di connessioni in raggruppamenti).

Il modello da loro proposto descrive la costruzione di una rete small-world partendo da un reticolo regolare e sostituendo i legami presenti con altri fra nodi diversi con probabilità p.

Sono proprio questi cortocircuiti (shortcut) i responsabili dell'effetto "piccolo mondo".

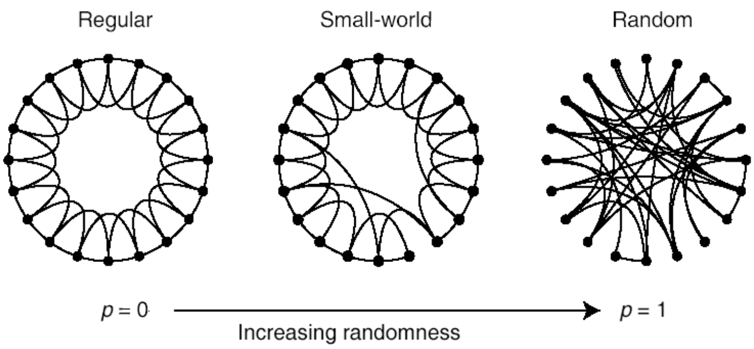


Figura 3.2 Costruzione di una rete small-world

Nell'evoluzione (all'aumentare della probabilità p di riconnessione) fra la regolarità e la casualità completa, esiste una regione nella quale le reti si autoorganizzano mostrando effetti di raggruppamento locale molto pronunciati assumendo già una generale compattezza tipica delle reti casuali (piccola distanza caratteristica)

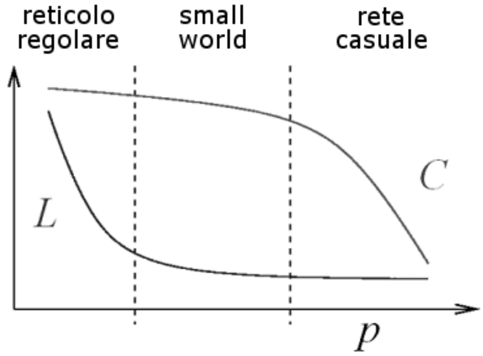


Figura 3.3 Andamento della distanza media L e del coefficiente di clustering C

La distribuzione delle probabilità di connessione dei diversi nodi della rete (distribuzione dei gradi) è più “larga” per una rete casuale che per una rete small-world.

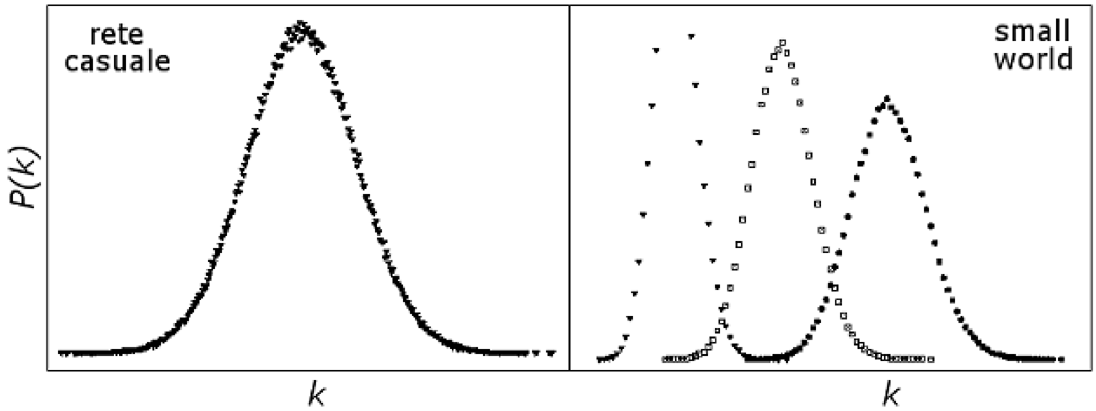


Figura 3.4 Distribuzione della probabilità di connessione

Lo sviluppo di Internet e di altre reti telematiche hanno evidenziato la necessità non solo di descrivere, ma anche di progettare reti in grado di comunicare in maniera efficiente. Efficienza che assume due diversi significati: poter trasmettere un messaggio lungo il cammino più breve (o più veloce, o comunque più economico) e poter contare sulla robustezza della rete, poter trovare cioè cammini alternativi per consegnare un messaggio in caso di guasto di qualcuno dei nodi.

Se si associa a ogni connessione un peso, un parametro di “costo”, allora il comportamento small-world in termini è chiaro. L’effetto di clustering rappresenta un’efficienza della rete e si può esprimere (Latora & Marchiori, 2001) come $\varepsilon(ij) = 1/d(ij)$, dove $d(ij)$ è il valore del cammino con minimo peso (costo) fra i nodi i e j. Nel caso in cui non esista una connessione fra i e j, $d(ij)=\infty$ e $\varepsilon(ij)=0$.

Per un nodo l’efficienza locale è calcolata come media su tutti i suoi vicini (gli altri nodi a questo connessi). Essa è una misura del livello di clustering della rete.

L’efficienza globale della rete è la media delle efficienze locali calcolate su tutti i nodi; grande efficienza globale corrisponde a piccoli diametri (massima distanza possibile fra due nodi qualunque) e quindi a dimensioni “compatte”; essa è anche una misura della capacità della rete di resistere a guasti (fault-tolerance).

Una rete small-world ha ancora una distribuzione di tipo poissoniano dei gradi dei suoi nodi, ma molte reti in natura mostrano una distribuzione di gradi del tutto diversa.

E’ questo il caso, per esempio, di reti come il WWW, quella degli attori cinematografici, le reti metaboliche o quelle elettriche. La distribuzione dei gradi segue una legge di potenza: $P(k) \sim k^{-y}$.

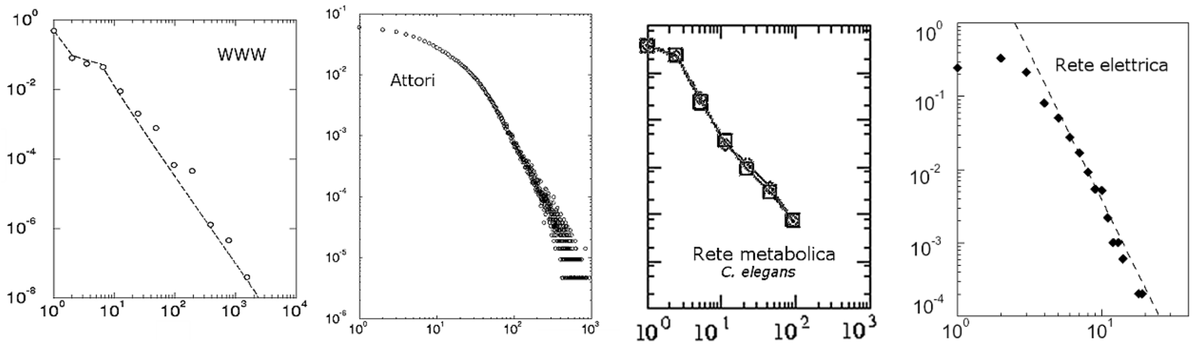


Figura 3.5 Reti reali scale-free

A differenza di una distribuzione di Poisson, ora non esiste più un parametro caratteristico (il grado medio) della maggioranza dei nodi, per questo motivo esse sono chiamate “senza scala” (scale-free). Questa caratteristica “evolutiva” di reti reali autoorganizzate viene spiegata da A-L. Barabási e R. Albert (1999) ricorrendo a due meccanismi: uno di *crescita* (a ogni intervallo di tempo un certo numero di nuovi nodi si aggiunge alla rete) e l’altro di *connessione preferenziale* (i nuovi nodi si collegano con maggiore probabilità a nodi già ricchi di connessioni). Questo comportamento “ricco diventa più ricco” produce l’effetto evidenziato.

Le reti scale-free sono estremamente eterogenee, la loro topologia è dominata da un numero relativamente ridotto di nodi molto collegati, che uniscono il resto degli elementi meno connessi del sistema. Lo studio di questo fenomeno può portare a interessanti risultati dal punto di vista della struttura generale di una tale rete e contribuisce a una migliore comprensione dei processi dinamici che le generano.

Il comportamento a legge di potenza è tipico di numerosi fenomeni del mondo della natura, della sociologia e dell’economia. Alla fine dell’Ottocento l’economista italiano Vilfredo Pareto (1896) aveva usato tale relazione per spiegare la distribuzione dei redditi e qualche decennio dopo il linguista americano George Zipf (1949) aveva spiegato con essa le frequenze delle parole nella lingua inglese e le popolazioni delle maggiori città del mondo.

Il semplice modello base di costruzione di una rete scale-free può essere arricchito utilizzando meccanismi di connessione preferenziale più complessi o ricorrendo a fenomeni di età (nodi più vecchi di una certa età smettono di originare connessioni) o di limitazione sul costo (peso) dei collegamenti che modificano le parti estreme della distribuzione dei gradi introducendo delle variazioni di pendenza (ginocchi o cut-off).

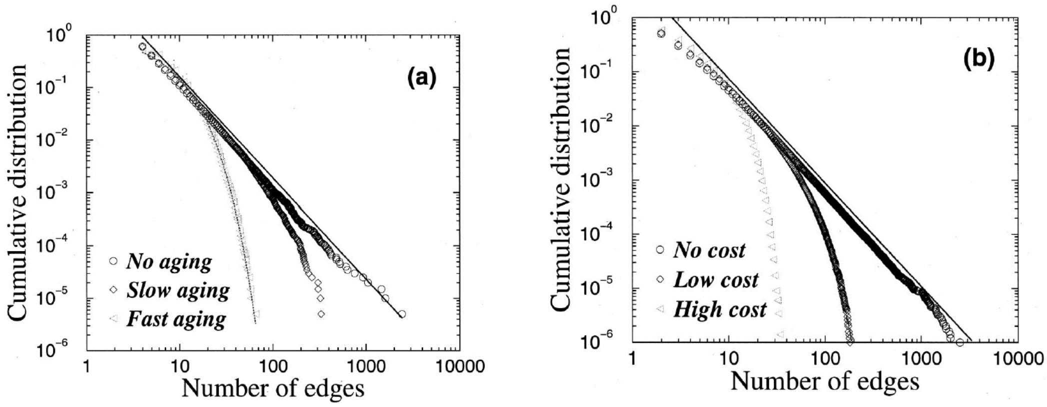


Figura 3.6 Effetti di limitazione da età e costo

Un altro parametro aggiunto al modello base riguarda la capacità di un nuovo nodo di accelerare la formazione di connessioni indipendentemente dalla sua età. La capacità di accumulare rapidamente collegamenti (fitness) consente di spiegare perché, per esempio, una pagina o un sito web abbiano un rapido successo anche se partono, al loro nascere, "poco connessi" e il fenomeno si traduce in una modifica dell'esponente della distribuzione dei collegamenti senza alterarne la sua struttura fondamentale. Con tali aggiunte il modello può rendere meglio conto di fenomeni quali l'evoluzione di molti sistemi competitivi.

Esaminando questi sviluppi si ravvisa poi una similitudine (la formulazione matematica è identica) con il comportamento fisico quantistico di quello che è noto come gas di Bose-Einstein. In certe condizioni di temperatura estremamente bassa si ha la formazione di condensati, la maggior parte degli atomi del gas collassano allo stesso stato quantistico fondamentale. Questo strano ed esotico fenomeno, predetto teoricamente da Bose e Einstein negli anni Venti e osservato in laboratorio solo pochi anni fa, tradotto nel linguaggio della teoria delle reti aumenterebbe enormemente l'effetto di scala portando a una rete in cui tutti i nodi sono connessi a stella al nodo centrale, come a dire che in particolari situazioni l'effetto "ricco diventa più ricco" diventa "chi vince prende tutto". Situazione non del tutto sconosciuta in alcuni settori economici o industriali (Albert & Barabási, 2002).

L'esatta formulazione matematica di molte delle proprietà delle reti complesse è ancora mancante, ma alcuni fenomeni sono già stati studiati ricorrendo a sofisticate simulazioni.

4. RETI REALI

La Tabella 4.1 mostra i parametri principali misurati di alcune reti reali (rielaborazione da: (Albert & Barabási, 2002; Dorogovtsev & Mendes 2002; Newman, 2003, Wang & Chen, 2003).

Tabella 4.1 Parametri di alcune reti reali. N = numero di nodi, <k> = grado medio, l = distanza caratteristica, γ = esponente della distribuzione dei gradi (-in e –out se rete orientata), C = coefficiente di clustering

Tipo	Rete	*N*	*<k>*	*l*	γ	γ*in*	γ*out*	*C*
Biologica	Rete metabolica	765	9.64	2.56	2.2			0.670
	Rete neurale	307	7.68	3.97				0.280
	Interazioni proteiche	2 115	2.12	6.80	2.4			0.071
Informativa	Co-occorrenza di parole	460 902	70.13	2.67	2.7			0.437
	WWW	325 729	4.51	11.20		2.1	2.5	
	WWW da Altavista	2.0E+08	10.46	16.18		2.1	2.7	
Sociale	Collaborazioni scientifiche (neurologia)	70 975	3.90	9.50	2.5			0.590
	Collaborazioni scientifiche (matematica)	209 293	11.54	6.00	2.1			0.760
	Dirigenti d'azienda	7 673	14.44	4.60				0.880
	Messaggi e-mail	59 912	1.44	4.95		1.5	2.0	0.160
	Attori cinema	449 913	113.43	3.48	2.3			0.780
	Relazioni fra studenti	573	1.66	16.01				0.001
	Chiamate telefoniche	4.7E+07	3.16		2.1			
Tecnologica	Circuiti elettronici	24 097	4.34	11.05	3.0			0.030
	Internet (nodi principali)	6 209	4.11	3.76				0.320
	Internet (router)	10 697	5.98	3.31	2.5			0.390
	Rete elettrica	4 941	2.67	18.70				0.080
	Software	1 439	1.20	2.42		1.4	1.6	0.082
	Linee ferroviarie	587	66.79	2.16				-0.033

5. EFFETTI DI RETE

Se si definisce una funzione di energia *E(d,k)* per una rete, legata al peso (costo) dei collegamenti e alla distanza fra i nodi, è possibile studiare un processo di ottimizzazione che porti a una situazione di energia minima (Ferrer i Cancho, & Solé, 2001). Questa implica necessariamente la connessione della rete e la minimizzazione delle distanze e del numero di link. Simulazioni numeriche portano a evidenziare l'evoluzione da reti casuali verso reti caratterizzate di tipo small-world e scale-free con altri coefficienti di clustering. Definendo un'entropia:

$$H = -\sum_{k=1}^{N-1} p_k \log p_k$$

dove p_k è la frequenza di nodo con grado k, è possibile caratterizzare questa evoluzione, ottenendo i risultati di Figura 5.1.

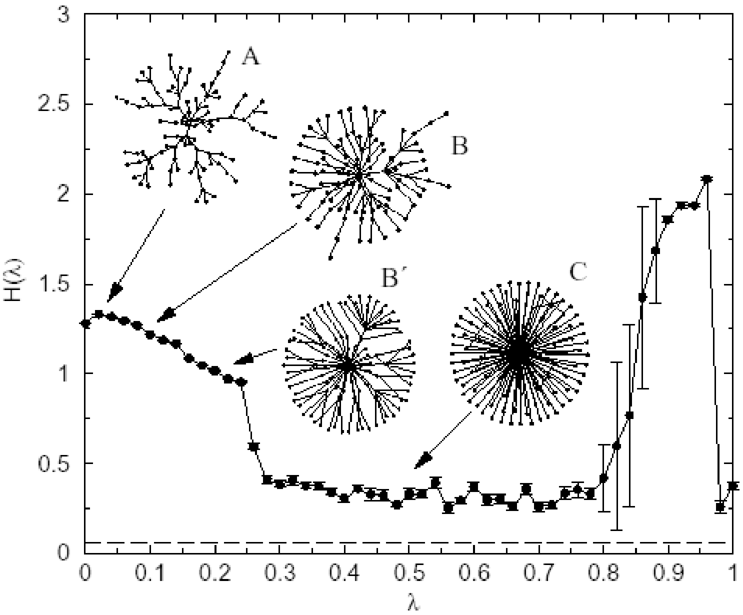


Figura 5.1 Entropia in funzione del tipo di rete: A = rete casuale, B = rete SF, C = rete a stella

I valori minimi sono ottenuti per reti altamente raggruppate (una rete a stella ha un solo nodo centrale che collega tutti gli altri).

Altra importante conseguenza della struttura scale-free è che la rimozione dei nodi a maggiore connessione porta immediatamente a un aumento del diametro e alla disintegrazione della rete in cluster isolati, mentre la rimozione casuale di altri nodi non ha effetti particolarmente sensibili.

Ciò mostra una buona tolleranza verso errori casuali. In reti casuali, invece, esiste una soglia critica per un tale effetto, se la rimozione del numero di nodi sorpassa il numero critico, la rete viene disintegrata (Albert & Barabási, 2002; Newman, 2003).

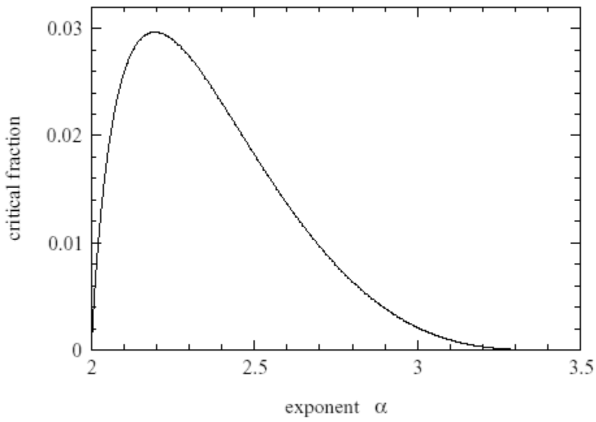


Figura 5.2 Numero critico di nodi da rimuovere per disintegrare la rete in funzione dell'esponente della distribuzione dei gradi

Questa contemporanea robustezza e fragilità è all'origine di alcuni fenomeni verificati in reti reali. Per esempio l'attacco mirato ad alcuni grossi *hub* della rete Internet ha portato più di una volta a paralisi dell'intero sistema, mentre la "scomparsa" di molti elementi singoli, poco connessi, non inficia minimamente il funzionamento regolare del resto della rete.

La diffusione di informazioni, di idee o di voci in una rete sociale, così come i meccanismi di infezione o di propagazione di virus informatici sono altri esempi di fenomeni che hanno una migliore comprensione con riferimento ai modelli di rete esaminati fin qui.

La spiegazione può passare attraverso l'applicazione della teoria della percolazione (Stauffer & Aharony, 1992).

Il fenomeno, noto in fisica, riguarda originariamente la diffusione di un liquido attraverso uno strato di materiale poroso. Uno dei risultati più importanti è la presenza di una soglia critica al di sopra della quale il fluido riesce a passare da parte a parte. La formulazione matematica può essere applicata a una rete considerando i collegamenti come "canali" di scorrimento, o i nodi come elementi che possono o meno essere "bagnati".

Lo studio del tasso di diffusione mostra che per reti scale-free la soglia critica dipende dall'esponente γ della distribuzione dei gradi. Nel caso di una rete infinita essa si annulla se $\gamma \leq 3$, che è il caso della stragrande maggioranza delle reti reali esaminate. Gli effetti limitanti di un numero finito (anche se grande) di elementi portano alla situazione raffigurata in Figura 5.3 (Pastor-Satorras & Vespignani, 2001).

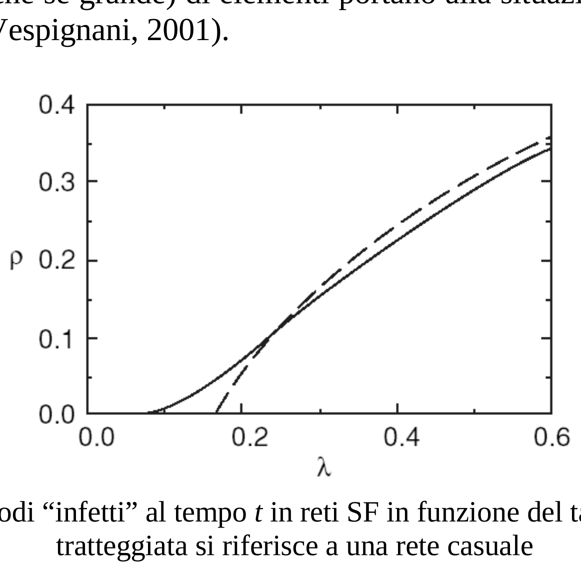


Figura 5.3 Densità dei nodi "infetti" al tempo *t* in reti SF in funzione del tasso di infezione, la linea tratteggiata si riferisce a una rete casuale

Come si vede la soglia critica è estremamente bassa. Ciò indica una grande velocità di diffusione in reti scale-free.

La diffusione può riguardare, per esempio, un malfunzionamento e in questo modo è possibile spiegare i blackout di energia elettrica che spesso avvengono; il maggiore responsabile è la forma della rete, non la capacità dei singoli nodi. Il malfunzionamento a cascata è proprio anche di altre situazioni; in economia esso è responsabile dei crolli di Borsa (per esempio la crisi americana del 1929 o quella in Estremo oriente del 1997).

Applicando questi modelli al campo sanitario è possibile rendersi conto della diffusione di epidemie come l'AIDS o la SARS e studiare, tenendo conto dei comportamenti delle reti, le strategie di immunizzazione più efficaci.

Lo stesso meccanismo è utilizzabile per spiegare la rapida propagazione di una leggenda metropolitana o l'instaurarsi improvviso di una moda: nel marketing queste tecniche possono essere utili per aumentare gli effetti dei messaggi di promozione o per rendere più efficienti i meccanismi di diffusione di nuovi prodotti o tecnologie.

6. CONCLUSIONE

Il nostro secolo è caratterizzato fortemente da due fenomeni complessi: l’economia dell’informazione e l’economia delle reti. In entrambi i casi si tratta di sistemi complessi e dinamici e quindi inaccessibili ad uno studio quantitativo, almeno per come comunemente lo si intende. Un modo per cercare modelli e teorie che possano consentire non tanto previsioni puntuali, quanto la costruzione di un quadro di riferimento, all’interno del quale cercare spiegazioni coerenti di certi fenomeni, è quello di analizzare la forma generale di questi sistemi.

Gli ultimi risultati teorici e sperimentali dicono che è possibile applicare metodi, tecniche e risultati della meccanica statistica o di altre aree della fisica per individuare similitudini matematiche tra fenomeni diversi.

Queste analisi (e la loro matematica) ci aiutano allora a capire e prevedere i processi di sviluppo e di degenerazione delle reti astratte (grafi), delle strutture economiche, delle interazioni sociali, degli organismi biologici o dei sistemi tecnologici.

Metodologie di questo tipo aiutano anche a progettare reti più resistenti a situazioni di emergenza e ad attacchi mirati o a ottimizzare reti esistenti per renderle più economiche, più efficienti o meno costose.

7. BIBLIOGRAFIA

Albert, R.& Barabási, A-L. (2002). “Statistical mechanics of complex networks.” *Review of Modern Physics*, 74, pp. 47-91.

Baggio, R., & L. Caporarello (2003). *Gestire la tecnologia: metodi di analisi e valutazione*. Milano: Guerini.

Barabási, A.-L. (2002). *Linked: The New Science of Networks*. Cambridge, MA: Perseus.

Barabási, A-L., Albert, R. (1999). “Emergence of scaling in random networks”, *Science*, 286, pp. 509-512.

Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of Complex Systems*, Reading, MA: Addison-Wesley.

Bollobás, B. (1985). *Random Graphs*. London: Academic Press.

Bornholdt, S., Schuster, H. G., eds. (2002). *Handbook of Graphs and Networks - From Genome to the Internet*, Berlin: Wiley-VCH.

Buchanan, M. (2002). *Nexus: Small Worlds and the Ground-breaking Science of Networks*. New York: Norton.

Dorogovtsev, S. N. & Mendes, J. F. F. (2003). *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford: Oxford University Press.

Dorogovtsev, S. N. and Mendes, J. F. F. (2002). “Evolution of networks.” *Advances in Physics*, 51, pp. 1079–1187.

Erdős, P. & Rényi, A. (1959). “On random graphs,” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 6, pp. 290–297.

Erdős, P. & Rényi, A. (1960). “On the evolution of random graphs,” *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, vol. 5, 17-61.

Euler, L. (1736). “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.” *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, pp. 128-140.

Ferrer i Cancho, R., Solé, R. V. (2001). “Optimization in Complex Networks,” preprint 0111222, online: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0111222.

Guedj, D. (1998). *Le théorème du perroquet*. Editions du Seuil. Trad. ital. di C. Cavaterra, *Il teorema del pappagallo*. Milano: Longanesi, 2000.

Gui, B. (1323). *Practica officii inquisitiones heretice pravitatis*.

Hackathorn, R. (2003). “The link is the King,” *DM Review*, August, online: http://www.dmreview.com [ultimo accesso: dicembre 2003].

Hayes, B. (2000a). “Graph Theory in Practice: Part I,” American Scientist, vol. 22, n. 1 (January-February), pp. 9-13.

Hayes, B. (2000b). “Graph Theory in Practice: Part II,” American Scientist, vol. 22, n. 2 (March-April), pp104-109.

Karinthy, F. (1929). *Chains. Everything is different*. Budapest.

König, D. (1936). *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig.

Latora V., Marchiori, M. (2001). “Efficient behavior of small-world networks,” *Physical Review Letters*, 87, art. n. 198701.

Leibnitz, G. W. (1693). *De Analysi situs*. In *G.W. Leibnitz Matematische Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, Hildesheim: OLMS, V, pp. 178-183 (riproduzione anastatica dei *Leibnitzes Matematische Schriften*, 1858).

Milgram, S. (1967). “The small world problem,” *Psychology Today*, vol. 1, pp. 60–67.

Newman, M. E. J. (2003). "Random graphs as models of networks." In S. Bornholdt & H. G. Schuster (eds.), *Hand-book of Graphs and Networks*, pp. 35–68, Berlin: Wiley-VCH.

Newman, M. E. J. (2003). "The structure and function of complex networks." *SIAM Review*, 45, pp. 167-256.

Ormerod, P., Roach, A. (2003). "The medieval Inquisition: scale-free networks and the suppression of heresy," preprint 0306031, online: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0306031.

Padgett, J. F., Ansell, C. K. (1993). Robust Action and the Rise of the Medici, 1400-1434, American Journal of Sociology, 98(6), pp. 1259-1319.

Pareto, V. (1896). *Cours d'Economie Politique*, (Geneva, CH: Droz, 1896) (Lausanne et Paris: Rouge, 1897).

Pastor-Satorras R., Vespignani, A. (2001). "Epidemic spreading in scalefree networks," *Physical Review Letters*, 86 (14), pp. 3200-3203.

Reynolds, C. (1987). "Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model," in: *Computer Graphics: Proceedings of SIGGRAPH `87*, ACM Press., pp. 25-34.

Stauffer, D., Aharony, A. (1992). *Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed., London: Taylor & Francis.

Wang, X. F. & Chen, G. (2003). "Complex Networks: Small-World, Scale-Free and Beyond." IEEE Circuits and Systems Magazine, 3 (1), pp. 6-20, June.

Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998) "Collective dynamics of 'small world' networks", *Nature*, 393, pp. 440-442.

Zipf, G.K. (1949). *Human Behavior and the Principle of Least Effort: an Introduction To Human Ecology*. Cambridge: Addison-Wesley.